

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
Физика-техникалық факультет
Электроника және астрофизика кафедрасы

Алимгазинова Н.Ш.

Аспан механикасы

пәні бойынша дәрістер жинағы

«Физика және астрономия» мамандығы бойынша білім алушы
студенттерге арналған

Алматы, 2025

4-дәріс. Эллипстік, гиперболалық, параболалық, шеңберлік және түзусызықты қозғалыс

Дәрістің мақсаты. Білім алушыларға екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясын түсіндіру; эллипстік, гиперболалық, шеңберлік, параболалық және түзусызықты қозғалыстардың физикалық және математикалық сипаттамаларын меңгерту; орбита пішінін анықтайтын параметрлердің әсерін талдауға және түрлі қозғалыс түрлерін ажырата білуге үйрету.

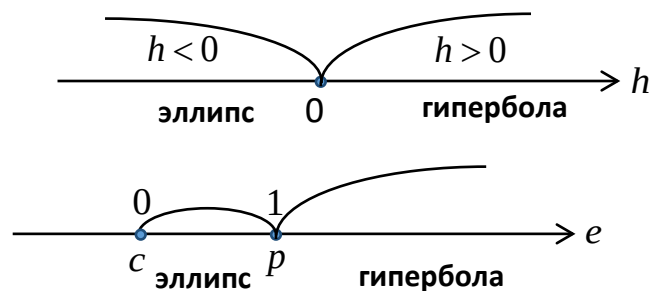
Жоспар

1. Екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясы
2. Эллипстік қозғалыс
3. Гиперболалық қозғалыс
3. Шеңберлік қозғалыс
4. Параболалық қозғалыс
5. Түзусызықты қозғалыс

1. Екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясы

Шеңберлік және эллипстік қозғалыстар – финитті қозғалыстар (қозғалыс жазықтықтың шектеулі аймағында болады), жалпы энергияның мәні «-» болады – тартылыс центрдің гравитациялық әсерінен шығу үшін кинетикалық энергияның мәні жеткіліксіз болу керек.

Параболалық және гиперболалық қозғалыстар – инфинитті қозғалыстар, жалпы энергия 0-ден жоғары және қозғалатын нүкте тартылыс күшіне қарамастан шексізге кетеді.



1 сурет – Кеплер қозғалысының түрлері

Шеңберлік жылдамдық $V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ және параболалық жылдамдық $V_p = \sqrt{2\frac{\mu}{r}}$ арқылы бірінші және екінші ғарыштық жылдамдықты анықтауға болады. Егер r арақашықтықты R - орталық дененің радиусы және H - ұшу биіктігі арқылы, ал μ – гравитациялық тұрақтысын - дененің радиусы мен оның бетіндегі ауырлық күшінің үдеуі (g) арқылы ауыстырсақ

$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}, \quad (1)$$

сонда $H=0$ жағдайда *бірінші және екінші зарыштық жылдамдықтары*

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \quad (2)$$

1 кесте.

Қозғалыстың түрі	e	c	λ	h	V, r	$\delta = (r, V)$
Шеңберлік	0	$\neq 0$	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
Эллипстік	$0 < e < 1$	$\neq 0$	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Параболаалық	1	$\neq 0$	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Гиперболаалық	> 1	$\neq 0$	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	$0^\circ < \delta \leq 180^\circ$
Түзусызықты	1	0	<i>кез келген</i>	<i>кез келген</i>	<i>кез келген</i>	0° немесе 180°

Екі дене есебінде қозғалыстың түрлері:

- ✓ Негізгі - эллипстік және гиперболаалық;
- ✓ Шектеулі – шеңберлік және параболаалық;
- ✓ Нұқсанды – түзусызықты қозғалыс.

2. Эллипстік қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0$, $0 < \lambda < \mu$, $h < 0$, $p \neq 0$, $0 < e < 1$ мәндерге ие болса - эллипстік қозғалыс болады.

Екі дене есебін шешу үшін шын аномалиямен уақыттың байланысы осы интеграл арқылы анықталады

$$\int_0^v r^2 dv = c(t - \tau). \quad (3)$$

Интегралды шешу үшін тағы негізгі параметрлерді енгізу қажет.

Эллипстік орбитаның a - үлкен жарты осіне радиусы тең шеңберді сызамыз және орбита бойымен қозғалатын дененің сол кездегі орналасу нүктесінен эллипстің үлкен жарты осіне перпендикуляр өткізгенде ***E*** - ***эксцентрлік аномалия*** анықталады. ***Эксцентрлік аномалия E*** дегеніміз эллипстің үлкен жарты осі және перпендикулярдың шеңбермен қиылысу нүкте бағыты арасындағы бұрыш (10 сурет). ***E*** қозғалыс бағытында 0° ден 360° арасында өлшенеді.

Сонда

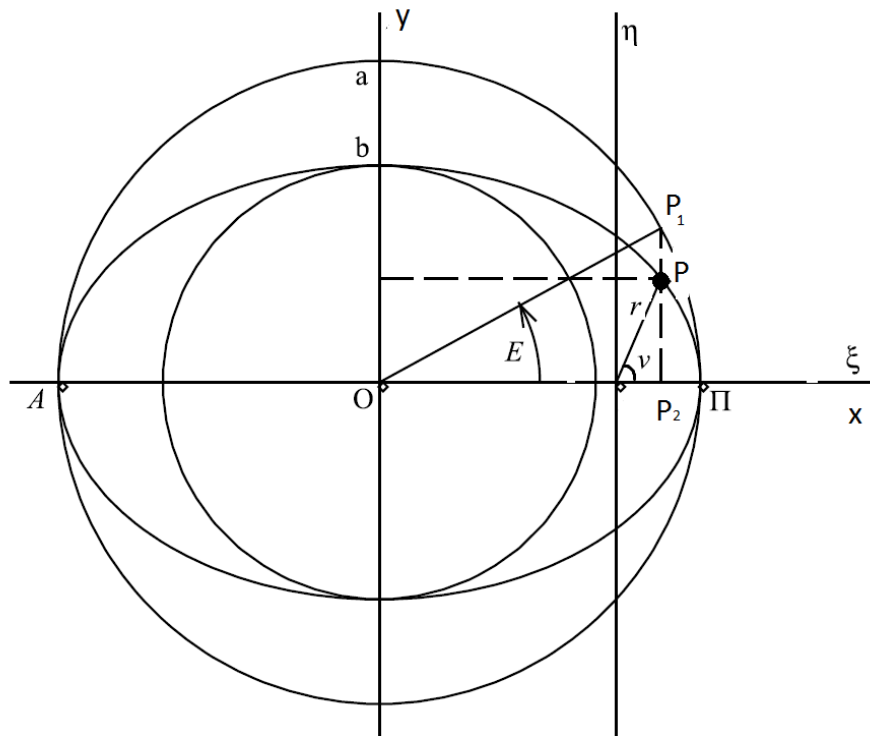
$$a \cos E = ae + r \cos \nu. \quad (4)$$

Егер $\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b}$ және $r \sin \nu = a\sqrt{1-e^2} \sin E$ болса, дененің орбиталдық координаттары:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \nu = a(\cos E - e), \\ \eta &= r \sin \nu = a\sqrt{1-e^2} \sin E, \end{aligned} \quad (5)$$

және радиус-векторы

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (6)$$



2 сурет – Эксцентрлік аномалия

Егер

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (7)$$

болса, шын және эксцентрлік аномалиялар арасындағы байланысы

$$\operatorname{tg} \nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (8)$$

(7) дифференциалдаған кезінде

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} dE. \quad (9)$$

(6) мен (9)-гі (3)-ші формулада ескерген кезде

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) \quad (10)$$

немесе

$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (11)$$

Осында $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ - эллипстік орбита бойымен қозғалатын дененің орташа бұрыштық жылдамдығы немесе орташа қозғалыс деп аталады. (11) формула - эллипстік қозғалыс кезіндегі екі дене есебінің шешімі – **Кеплер теңдеуі**.

Егер ***M – орташа аномалия*** болса және

$$M = n(t - \tau), \quad (12)$$

сонда (11)

$$E - e \sin E = M. \quad (13)$$

*Егер **a** радиусы бар шеңбер арқылы кез келген нүкте тұрақты жылдамдылығымен қозғалса, және бір уақытта аспан денесімен бірге перицентр арқылы өтетін болса, сонда осы нүктенің радиус-векторы және перицентр бағыты арасындағы бұрыш **M- орташа аномалия** болады. **M** аспан денесінің қозғалыс бағытына қарай 0° дан 360° өлшенеді.*

Эллипстік қозғалысында энергия тұрақтысы

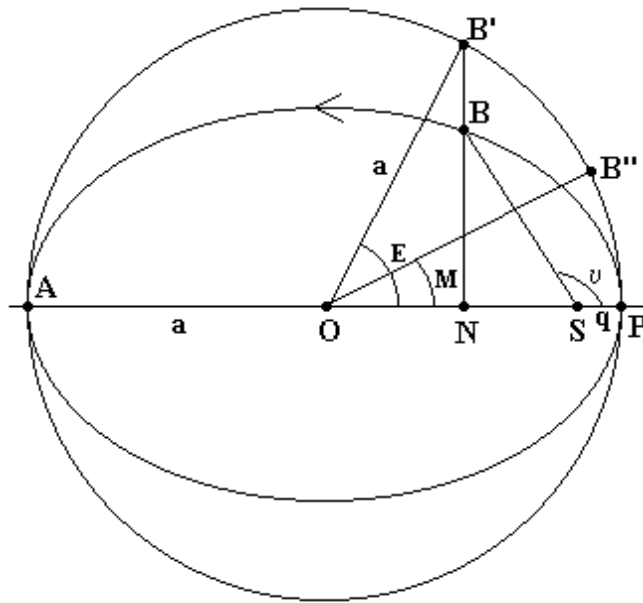
$$h = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2} = \mu \frac{e^2 - 1}{p} = -\frac{\mu}{a}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (14)$$

Эллипстік орбита бойымен қозғалатын материалдық нүктенің айналу периоды

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}}. \quad (15)$$

Осыдан **жалпыландырылған Кеплердің үшінші заңы**

$$\frac{T^2}{a^3} (m_0 + m) = \frac{4\pi^2}{G} = \text{const}. \quad (16)$$



S – эллипстің фокусы, O – эллипстің центрі, P - перицентр, A - апоцентр, $\omega = |SP|$ - перицентрлік арақашықтық, $a = |OA|$ - эллипстің үлкен жарты осі

3 сурет – Орташа аномалия

Сонда екі дене есебінің шешімі бойынша эллипстік орбита бойымен қозғалатын нүктенің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \right] \quad (17)$$

және жылдамдық компоненттері

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \left[- \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \right]. \quad (18)$$

Энергия сақталу заңынан эллипстік қозғалыс кезіндегі жылдамдықтың модулі

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (19)$$

немесе

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (20)$$

Эллипстік қозғалыс кезінде кейбір параметрлерді басқаларымен ауыстырады: *перицентрлік арақашықтықты – перицентрдің бойлығымен ауыстырады*

$$\pi = \Omega + \omega, \quad (21)$$

τ - перицентр арқылу өту моментін – t_0 - бастапқы дәуірдегі M_0 - орташа аномалиямен; M_0 – бастапқы дәуірдегі орташа бойлығымен

$$\varepsilon = \pi + M_0 = \Omega + \omega + M_0. \quad (22)$$

Сонда эллипстік қозғалыс кезіндегі **эллипстік кеплер элементтері** - $\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon$.

2 кесте. Үлкен планеталардың негізгі орбита элементтері

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Меркурий	0,387	0,240	116	4,09°	7,00°	0,206	48°	77°	252°
Шолпан	0,723	0,615	584	1,60°	3,40°	0,007	77°	131°	182°
Жер	1,000	1,000	-	0,99°	0,00°	0,17	-	103°	100°
Марс	1,524	1,881	780	0,524°	1,85°	0,093	49°	336°	335°
Юпитер	5,203	11,86	399	0,083°	1,30°	0,048	100°	14°	32°
Сатурн	9,555	29,54	378	0,034°	2,48°	0,056	113°	93°	50°
Уран	19,218	84,25	370	0,012°	0,76°	0,047	74°	173°	314°
Нептун	30,110	165,2	368	0,006°	1,77°	0,009	132°	48°	304°
Плутон	39,53	250,1	367	0,004°	17,50°	0,250	110°	223°	130°

3 кесте. Кейбір кіші планеталардың негізгі орбита элементтері

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Церера	2,78	4,60	467	0,214°	10,6°	0,077	81°	152°	8°
Паллада	2,77	4,61	467	0,214°	34,8°	0,235	173°	123°	355°
Юнона	2,67	4,36	474	0,226°	13,0°	0,257	171°	57°	243°
Веста	2,36	3,63	504	0,272°	7,1°	0,090	104°	254°	341°
Икар	43,19	283,82	366	0,003°	17,2°	0,051	273°	10°	87°
Варуна	39,43	247,61	367	0,004°	19,8°	0,241	71°	11°	262°

2 және 3 кестелерде үлкен мен кіші планеталардың орбита элементтерінің мәндері көрсетілген (белгіленулер: a – үлкен жарты осі, а.б.; T – сидерикалық период, жылдар; S – синодикалық период, тәулік; n – тәулік бойынша орташа қозғалыс, градус; e – эксцентриситет; i – эклиптикаға еңкею, градус; Ω – түйіннің бойлығы, градус; π – перигелийдің бойлығы, градус; M_0 – орташа аномалия (2000 дәуір), градус).

3. Гиперболалық қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0$, $\lambda > \mu$, $h > 0$, $p \neq 0$, $e > 1$ мәндерге ие болса гиперболалық қозғалыс болады.

Эллипстік және гиперболалық қозғалыстардың бір бірінен айырмашылығы көп болса да, олардың қозғалысын сипаттайтын

теңдеулердің құрылымы ұқсас екенін байқалады. Сондықтан эллипстік теңдеулерде осындай өзгерістер енгіземіз:

$$\sin E \rightarrow shH, \cos E \rightarrow chH, tgE \rightarrow thH,$$

осында H - өлшемі жоқ айнымалы шама, $-\infty$ -ден $+\infty$ дейін өзгереді. Сонда, шын аномалиямен H шаманың байланысы

$$tg \nu = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} th \frac{H}{2}. \quad (23)$$

Гиперболалық қозғалыс үшін Кеплер теңдеуінің аналогы

$$e \cdot chH - H = n(t - \tau). \quad (24)$$

Орбиталдық координаттар (a – гиперболаның жарты осінің нақты мәні)

$$\begin{aligned} \xi &= a(e - chH), \\ \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \cdot shH, \\ r &= a(e \cdot chH - 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Қозғалыс жылдамдығы

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{e \cdot chH + 1}{e \cdot chH - 1}. \quad (26)$$

Егер материалдық нүкте гипербола бойымен шексізге ұмтылса, оның жылдамдығы

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (27)$$

бұл теңдеу жылдамдықтың **гиперболалық артығы** деп аталады.

Сонда екі дене есебінің шешімі бойынша гиперболалық орбита бойымен қозғалатын нүктенің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - chH) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{e^2 - 1} \cdot shH \right]. \quad (28)$$

3. Шеңберлік қозғалыс

Егер $c \neq 0, \lambda = 0, h < 0, p \neq 0, e = 0$ болса, сол кезде екі дене есебіндегі қарапайым қозғалыстың түрі болады. Тек шеңберлік қозғалыс үшін қозғалыстағы дененің жылдамдығының координаттары мен компоненттері

айқын уақыт функцияларымен анықталады. Осы қозғалыста перицентр және апоцентр сипаттамалары болмайды, сондықтан ω - перицентрлік арақашықтықтың мағынасы болмайды.

Шеңберлік орбитада дененің орналасу бұрышын орбитаның **жоғары (солтүстік) түйіннен** есептеуге болады. Сол кезде ν - шын аномалия бір жағынан u - ендік аргументімен, екінші жағынан E - эксцентрлік аномалиямен және M - орташа аномалиямен сәйкес келеді. Орбитаның векторлық элементтерінің мағынасы болмайды. Шеңберлік қозғалыс орбитаның 4 элементтерімен анықталады: r - орбитаның радиусы, Ω - бұрыштың бойлығы, i - орбита еңкеюі және τ - материалдық нүктенің жоғары түйін арқылы өту мерзімі (немесе t_0 - бастапқы дәуіріндегі M_0 - орташа аномалия).

Аспан денесі шеңберлік орбита бойымен қозғалса ($r = p = a$), бастапқы тікбұрышты координаттары

$$\begin{aligned} x &= a(\cos \Omega \cos M - \sin \Omega \sin M \cos i), \\ y &= a(\sin \Omega \cos M - \cos \Omega \sin M \cos i), \\ z &= a \sin M \sin i, \end{aligned} \quad (29)$$

мен орбиталдық тікбұрышты координаттары және жылдамдық компоненттері:

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos M, & \dot{\xi} &= -an \sin M, \\ \eta &= a \sin M, & \dot{\eta} &= an \cos M, \end{aligned} \quad (30)$$

осында

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad (31)$$

n - қозғалыстың тұрақты бұрыштық жылдамдық.

(31) формула арқылы шеңберлік қозғалыс үшін Кеплердің үшінші заңын және қозғалыстың сызықты жылдамдығын анықтауға болады

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (32)$$

Табиғатта әрдайым ұйытқу факторлары аспан денесінің қозғалысына әсеретеді. Сондықтан шеңберлік қозғалыс табиғатта болмайды, оны бірақ эксцентриситеті төменгі эллипстік қозғалыстың қарапайым жуықтауы ретінде қарастырады.

4. Параболалық қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c \neq 0$, $\lambda = \mu$, $h = 0$, $p \neq 0$, $e = 1$ мәндерге ие болса параболалық қозғалыс болады. Қозғалыс заңы

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t - \tau). \quad (33)$$

Егер

$$\cos v = \frac{1 - tg^2 \frac{v}{2}}{1 + tg^2 \frac{v}{2}}, \quad (34)$$

болса

$$\int_0^v \left(1 + tg^2 \frac{v}{2}\right) \sec^2 \frac{v}{2} dv = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t - \tau). \quad (35)$$

p - орбита параметрінің орнына $2q$ (q – параболаның төбесінен фокусқа дейін арақашықтық немесе *парабола үшін перицентрлік арақашықтық*) және $\sigma = tg\left(\frac{v}{2}\right)$ теңдеуге енгізгенде, интегралдын шешімі – **Баркер теңдеуі**

$$\sigma^3 + 3\sigma - 3n(t - \tau) = 0, \quad (36)$$

осында

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2}} q^{-3/2}. \quad (37)$$

Орбита теңдеуіне енгізгенде

$$r = q(1 + \sigma^2),$$

егер

$$\sin v = \frac{2tg \frac{v}{2}}{1 + tg^2 \frac{v}{2}},$$

болса, орбиталды координаттар:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= r \sin v = 2q\sigma. \end{aligned} \quad (38)$$

және бастапқы тікбұрышты координат жүйесінің координаттары

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (1 - \sigma^2) + 2 \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sigma \right]. \quad (39)$$

Параболалық қозғалыс кезіндегі жылдамдықтың модулі

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}. \quad (40)$$

Табиғатта ұйытқулар болғандықтан, параболалық қозғалыс болу мүмкін емес. Бірақ эллипстік және гиперболалық қозғалыс кезінде эксцентриситетің мәні 1-ге жақындаса осы қозғалысты қарастырады. Мысалы кометалардың қозғалысы.

5. Түзусызықты қозғалыс

Егер бірінші интегралдардың тұрақтылары $c = 0$, $\lambda = \mu$, $h \neq 0$, $p = 0$, $e = 1$ мәндерге ие болса түзусызықты қозғалыс болады.

Орбитаның сызығы координат басы нүктесінен өтеді, өйткені $\vec{r} \uparrow \dot{\vec{r}}$. Бағыттау векторы ретінде бастапқы вектор $\vec{r}_0$ алынады.

Осы жағдайда векторлық теңдеу

$$\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0,$$

және скалярлық теңдеулер

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (41)$$

Сонда

$$V^2 = \dot{r}^2$$

және энергия интегралын табу арқылы осы траекторияның қозғалыс заңын анықтауға болады.

Интегралдың шешімін қарапайым жолымен анықтау үшін берілген шамаларды басқа шамаларымен ауыстырамыз

$$\sqrt{|h|}dt = \sqrt{\mu/a}dt = rd\eta, \quad (42)$$

осында

$$a = \mu/|h|,$$

η - жаңа өлшемі жоқ айнымалы шама.

Сонда

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + \text{sign}(h) \cdot r^2}}. \quad (43)$$

$r_0 = 0$ кезінде келесі шамаларды анықтауға болады

$$\begin{aligned}
a(1 - \cos \eta), & \quad h < 0, \\
r = \frac{a}{2} \eta^2, & \quad h = 0, \\
a(ch\eta - 1), & \quad h > 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

Осы жағдайда t уақыт η аргументімен осындай байланыста болады

$$\begin{aligned}
\eta - \sin \eta, & \quad h < 0, \\
\frac{\eta^3}{6} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0), & \quad h = 0, \\
sh\eta - \eta & \quad h > 0.
\end{aligned} \tag{45}$$

Егер $e \rightarrow 1$, $a = \text{const}$ болса η - эксцентрілік аномалияның және оның гиперболалық аналогының шектеулі мәні болады. (45)-дің бірінші және үшінші қатынастары – Кеплер теңдеуінің және оның гиперболалық аналогының шектеулі формалары. a - эллипстің үлкен жартылай осінің немесе гиперболаның нақты жартылай осінің шектеулі мәні. Егер $h < 0$ болса, $a = \max(r)$. Осы теңдеулер Ньютонның тартылыс өрісіндегі бір материалдық нүктенің қозғалысын және сфера-симметриялық шаңды бұлттың эволюциясын сипаттайды.

Бақылау сұрақтары

1. Екі дене есебіндегі қозғалыстың классификациясы қандай белгілер бойынша анықталады?
2. Орбитаның эксцентриситеті қандай шаманы сипаттайды және оның мәні қозғалыс түрін қалай анықтайды?
3. Эллипстік қозғалыс кезінде дененің траекториясы мен энергиясының ерекшеліктері қандай?
4. Шеңберлік қозғалыс эллипстік қозғалыстың қандай шектік жағдайына сәйкес келеді?
5. Параболалық қозғалыстың физикалық мағынасы қандай және ол қандай энергия кезінде жүзеге асады?
6. Гиперболалық қозғалыстың ерекшелігі неде және ол қай жағдайда пайда болады?
7. Түзусыздықты қозғалыс дегеніміз не және ол қандай шарттарда орын алады?

Әдебиеттер

1. Алимгазинова Н.Ш. Аспан механикасы. Оқу құралы // Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 146 б.
2. Александров Ю. В. Небесная механика: Учебник. – Х.: ХНУ А 46 имени В. Н. Каразина, 2006. – 256 с.

3. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике: Учеб. Пособ. Для вузов. – Алматы, Издат. ..., 2009. 227 с.
4. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999, 160 с.
5. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.
6. Холшевников К.В., Никифоров И.И. Свойства гравитационного потенциала в примерах и задачах (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2008.

